Groupe épistémologie et histoire des mathématiques

Année 2010-2011

Les équations de degré 3 à travers l'histoire. Applications dans notre enseignement

Nos objectifs:

- **Etudier différentes périodes**
- **Partir de textes (originaux ou de traductions de référence)**
- **Construire des activités pour les élèves**

A. Méthodes de résolution graphique

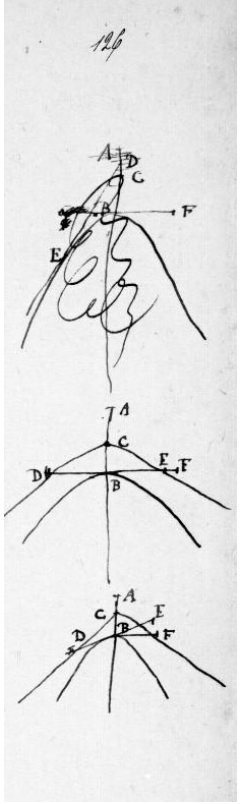
Ménechme - Archimède - Omar Khayyam

B. Méthodes de résolution algébrique

Cardan-Tartaglia

C. Méthodes de résolution numériques

Newton- Lagrange



A. Méthodes de résolution graphique

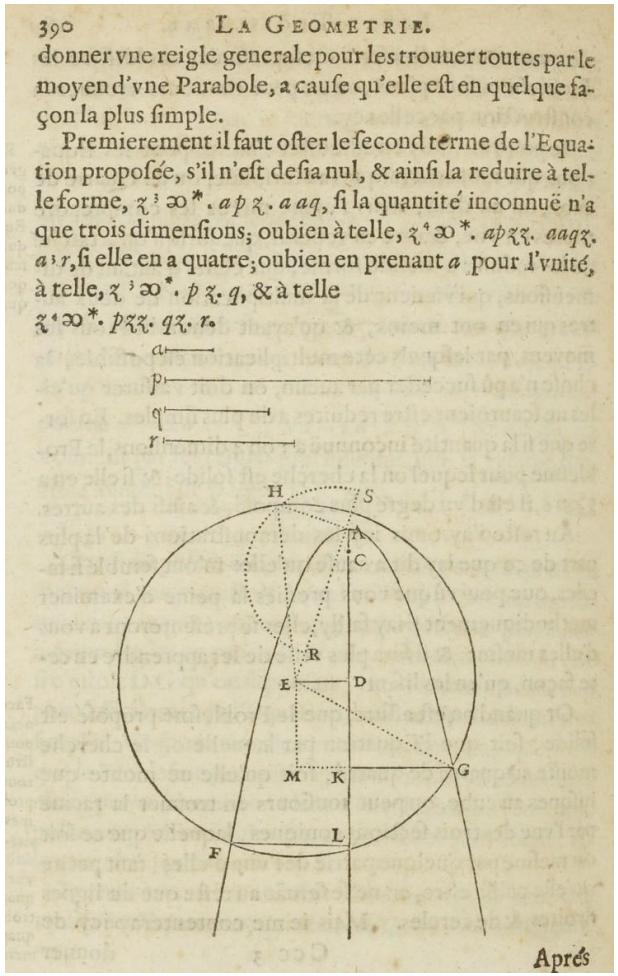
Résoudre des équations algébriques par l'intersection de coniques, toute une histoire…

- **Ménechme**, élève de Platon (-350), utilise une intersection de **parabole et hyperbole (duplication du cube)**
- **Pappus**, **(trisection de l'angle)** utilise l'intersection **d'un cercle et d'une hyperbole équilatère,** **Archimède**, résous le problème de **partage d'une sphère par un plan** en deux parties dont le rapport des volumes est donné en utilisant l' intersection d'une **parabole et d'une hyperbole équilatère**
- **Classification** de toutes les équations de degré 3 à coefficients entiers par leur méthode de résolution (quelle(s) conique(s) choisir), par les mathématiciens arabes, **Omar Khayyâm** puis **Sharaf Al Din Al Tusi** (après échec d'une méthode algébrique).

Facon ge-
nerale
pour con-
ſtruire
tous les
probleſ-
mes ſoli-
des, re-
duits a
vne E-
quatiõ de
trois ou
quatre di-
menſions.

Et l'histoire ne s'arrête pas là: Équations de degré 4, et plus…

- Résolution d'éq de degré 4 de **Ibn Al Haytham (problème d'optique**), par intersection d'un **cercle et d'une parabole**
- **Descartes**: solutions d'équations de degré 3 ou 4 par intersection d'un **cercle** et d'une **parabole,** généralisation a des degrés plus élevés


390 LA GEOMETRIE.
donner vne reigle generale pour les trouuer toutes par le moyen d'vne Parabole, a cauſe qu'elle eſt en quelque façon la plus ſimple.

Premierement il faut oſter le ſecond terme de l'Equation propoſée, s'il n'eſt deſia nul, & ainſi la reduire à telle forme, $z^3 \propto^* . apz . aaq$, ſi la quantité inconnuë n'a que trois dimenſions; oubien à telle, $z^4 \propto^* . apzz . aaqz . a^3 r$, ſi elle en a quatre; oubien en prenant a pour l'vnité, à telle, $z^3 \propto^* . pz . q$, & à telle $z^4 \propto^* . pzz . qz . r$.

Aprés

A. De quelques problèmes de géométrie célèbres de l'Antiquité aux équations de degré 3

Méthode de résolution graphique:

intersection d'une parabole et d'une hyperbole

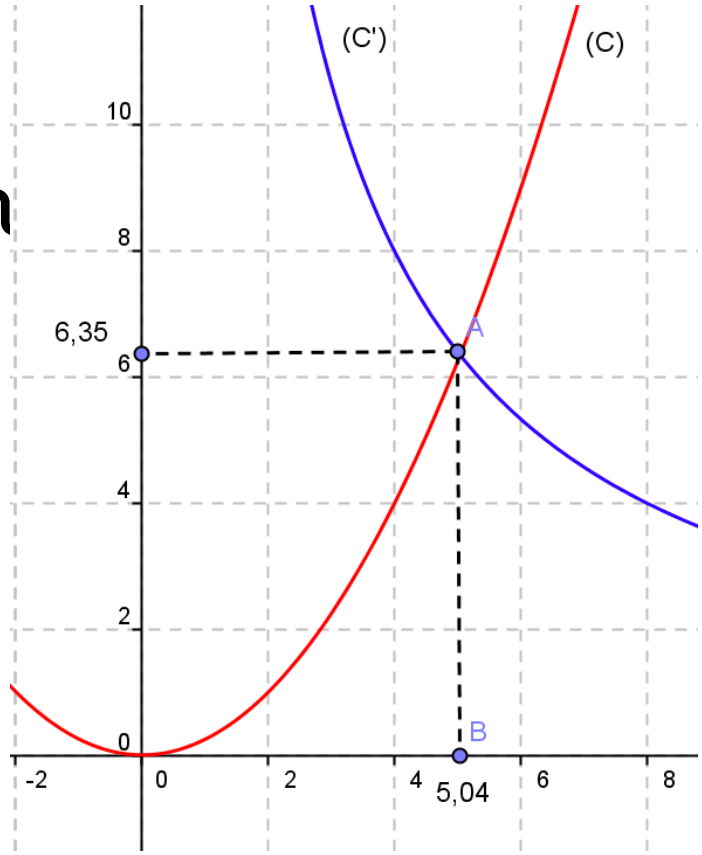
Obtenir une solution approchée en utilisant la méthode de Ménechme (-375 ; - 325)

La duplication du cube

$x^3 = 2a^3$

- **Ménechme** trace la parabole d'équation $y = \frac{1}{a}x^2$ et l'hyperbole d'équation $y = \frac{2a^2}{x}$

Il montre que la solution de l'équation est l'abscisse (positive) du point d'intersection des deux courbes.

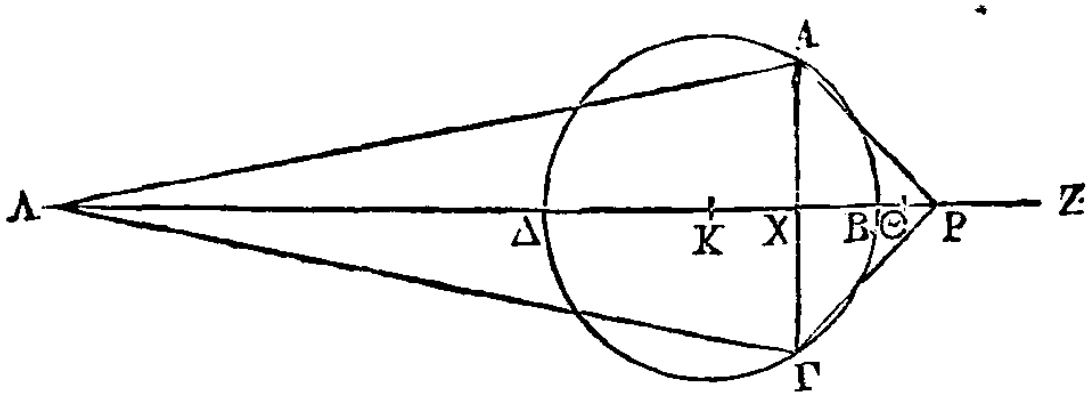


Un TP en salle informatique a été construit pour présenter le problème et le faire résoudre avec un logiciel de géométrie dynamique

Partager une sphère

Archimède (- 287; -325)

DE LA SPHERE ET DU CYLINDRE
LIVRE II PROPOSITION V.
« Couper une sphère donnée de manière que les segments aient entre eux une raison égale à une raison donnée »



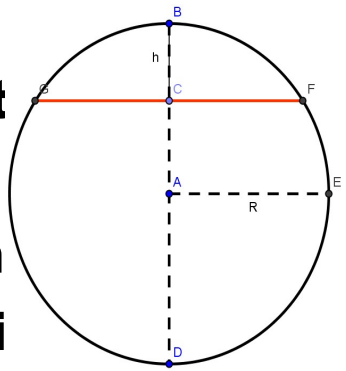
Partager une sphère

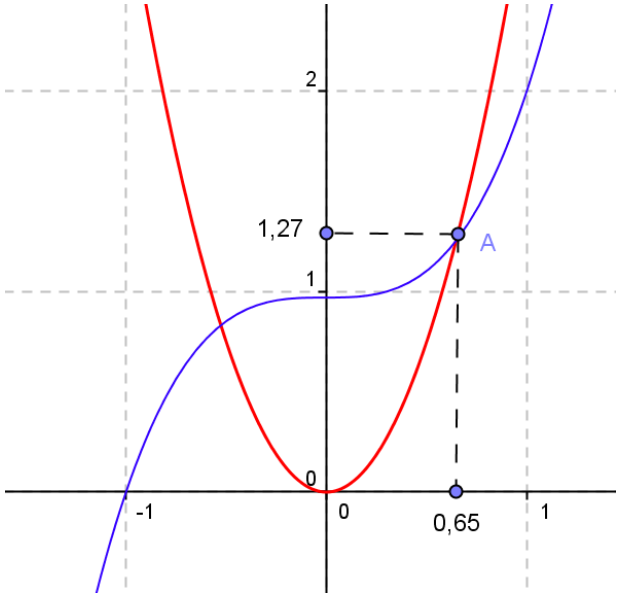
$x^3 + 1 = 3x^2$

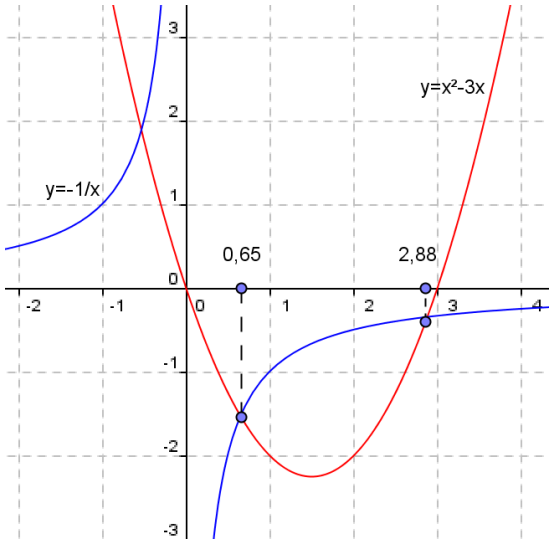
Un TP en salle informatique a été construit pour présenter le problème et le faire résoudre avec un logiciel de géométrie dynamique

Enoncé :

Comment partager une sphère en deux part parallèlement à l'un de ses grands cercles de telle façon que la « petite partie » ait un égal au tiers du volume de la « grande parti







A. Mathématiques arabes

Omar Al Khayyam 1045-1131

- **Classification des types d'équations à coefficients positifs**
- **Solutions géométriques par intersections de coniques : cercle, parabole, hyperbole**
- **Discussion du nombre de solutions**

Un exemple simple : $x^3+bx=c$

Justification algébrique moderne :

Homogénéisation $x^3+p^2\,x=p^2d$ avec $b=p^2$ et $c=p^2d$

Puis $x^4+p^2\,x^2=p^2dx$

En posant $py=x^2$: $p^2\,y^2+p^2\,x^2=p^2dx$

La solution est obtenue :

intersection de la parabole d'équation $py=x^2$

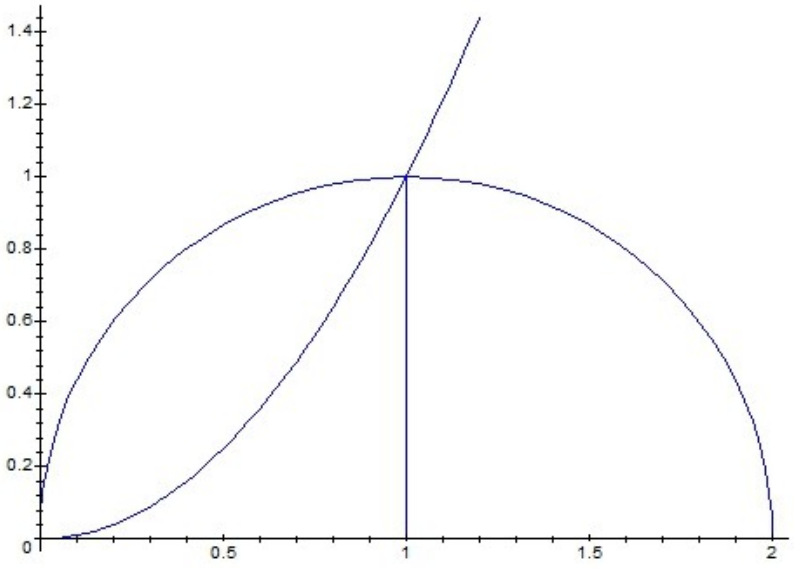
et du cercle d'équation $x^2+y^2=dx$

Solution géométrique d'Omar Khayyam

$x^3+x=2$ b=1 c=2

Tracé de la parabole $y=x^2$ x>0 sommet A

Tracé du demi-cercle $x^2+y^2=x$ y>0 diamètre



Solution géométrique d'Omar Khayyam

P intersection de la parabole

et du demi-cercle

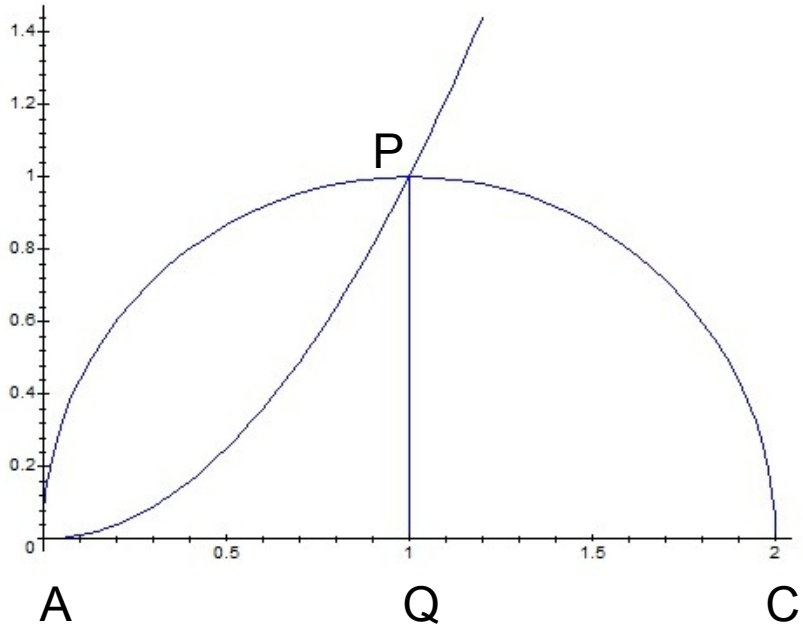
Q projection de P sur l'axe h

$AQ^2=PQ$

$PQ^2=AQ.QC=AQ(2-AQ)=2AQ-A$

$AQ^4=2AQ-AQ^2$

AQ est solution de $AQ^3+AQ^2=$



Remarque : toute équation de degré 3

peut se traiter par intersection

d'une parabole et d'un demi-cercle

B. Méthode de résolution algébrique

- **Nicolas Chuquet**(1445 ?-1488?) et **Luca Pacioli**(1445?-1517) présentent sous une forme concise les résultats alors classiques sur les équations algébriques.

- Le grand apport des mathématiciens italiens à l'algèbre est la résolution par radicaux des équations de degré 3 et 4.

- Les acteurs de cette résolution : **Scipione del Ferro** (1465-1526), **Antonio Maria Fior** (un de ses élèves) et bien entendu **Nicolò Tartaglia** (1499-1557) et **Jérôme Cardan** (1501-1576).

La méthode de Tartaglia

Texte original	Traduction en français	En langage algébrique « moderne »
Quando chel cubo con le coſe appreſſo Se agguaglia à qualche numero diſcreto Trouan dui altri differenti in eſſo.	Quand le cube auprès des choses Est égalé à un quelconque nombre discret, Trouve en lui deux nombres différents.	$x^3 + px = q$
Dapoi terrai queſto per conſueto Che'l lor produtto ſempre ſia eguale Al terzo cubo delle coſe neto,	Alors tu prendras pour habitude Que leur produit soit toujours égal Au tiers cubé [85] des choses exactement.	$q = u - v$ $uv = (p/3)^3$
El reſiduo poi ſuo generale Delli lor lati cubi ben ſottratti Varra la tua coſa principale.	Ensuite le reste général De leurs racines cubiques bien soustraites Sera égal à ta chose principale.	$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = x$
In el ſecondo de coteſti atti Quando che'l cubo reſtaſſe lui ſolo Tu oſſeruarai queſt'altri contratti,	Dans le deuxième de ces actes Quand le cube reste seul Tu observeras ces autres contrats	$x^3 = px + q$
Del numer farai due tal part'à uolo Che l'una in l'altra ſi produca ſchietto El terzo cubo delle coſe in ſtolo	Tu feras du nombre deux parties En sorte que l'une par l'autre produise nettement Le tiers cubé des choses exactement.	$q = u + v$ $uv = (p/3)^3$
Delle qual poi, per commun precetto Torrai li lati cubi inſieme gionti Et cotal ſomma ſara il tuo concetto.	De celles-ci ensuite, par une règle commune, Tu extrais les racines cubiques jointes ensemble, Cette somme deviendra ton principal résultat.	$\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = x$
El terzo poi de queſti noſtri conti Se ſolue col ſecondo ſe ben guardi Che per natura ſon quaſi congionti.	Ensuite le troisième de nos comptes Se résout avec le second si tu regardes bien Parce que par nature ils sont presque liés.	$x^3 + q = px$
Queſti trouai, & non con paſſi tardi Nel mille cinquecento, quatroe trenta Con fondamenti ben ſald'e gagliardi Nella citta dal mar'intorno centa.	J'ai trouvé ces choses sans lenteurs En mille cinq cent trente quatre Avec des fondements forts et certains Dans la cité entourée par la mer.	

Un exemple donné dans la Question XXXV

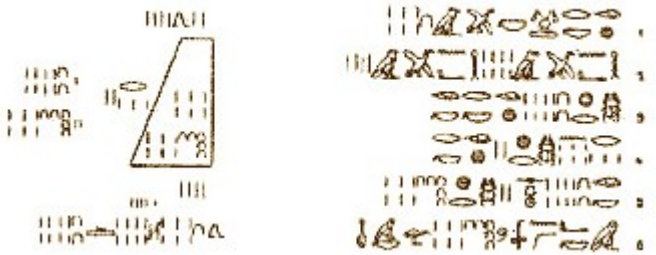
Utilisation du mode d'emploi de la chose et du cube égaux au nombre.
1 cube plus 3 choses égaux à 10

La réponse de Tartaglia est :

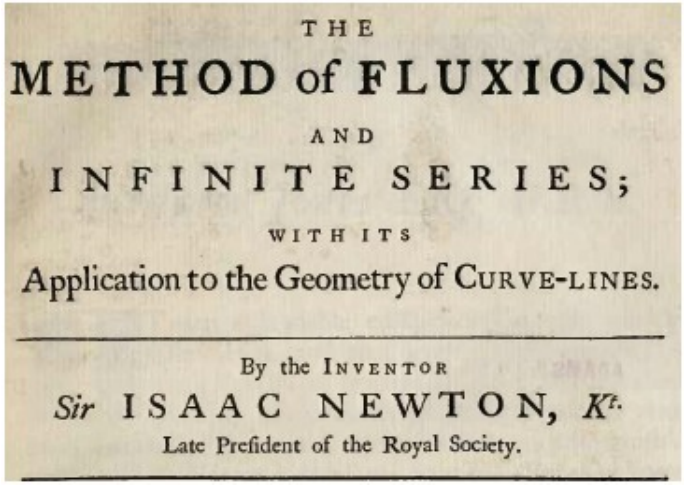
$$x = \sqrt[3]{5 - \sqrt{26}} + \sqrt[3]{5 + \sqrt{26}}$$

C. Les méthodes de résolutions numériques

- 1. Approche historique



PAPYRUS DE MOSCOU

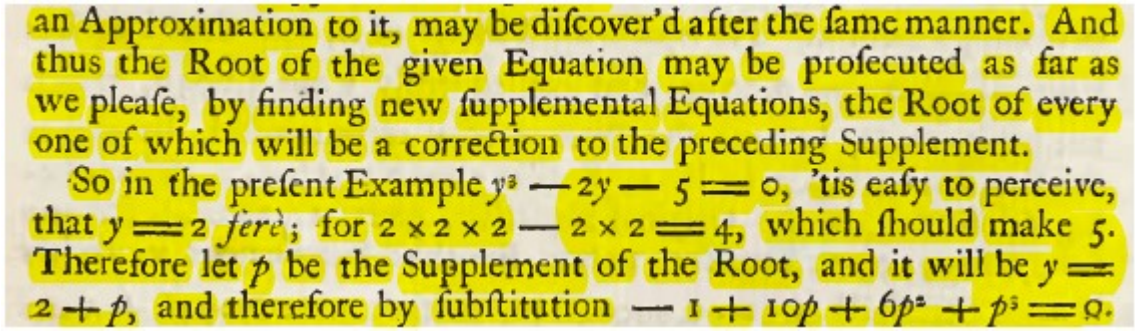


THE
METHOD of FLUXIONS
AND
INFINITE SERIES;
WITH ITS
Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR
Sir ISAAC NEWTON, *Kt.*
Late Prefident of the Royal Society.

LA METHODE DES FLUXIONS ET DES SUITES INFINIES. Newton 1671

- Méthodes de Fausse position
- Méthode de Newton-Raphson (dite des tangentes)
- Méthode de Lagrange (dite des sécantes)

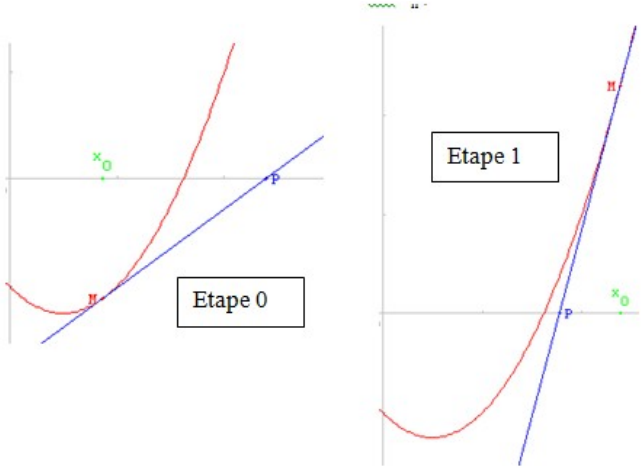


an Approximation to it, may be diſcover'd after the ſame manner. And thus the Root of the given Equation may be proſecuted as far as we pleaſe, by finding new ſupplemental Equations, the Root of every one of which will be a correction to the preceding Supplement.

So in the preſent Example $y^3 - 2y - 5 = 0$, 'tis eaſy to perceive, that $y = 2$ *ferè*; for $2 \times 2 \times 2 - 2 \times 2 = 4$, which ſhould make 5. Therefore let p be the Supplement of the Root, and it will be $y = 2 + p$, and therefore by ſubſtitution $-1 + 10p + 6p^2 + p^3 = 0$.

C. Les méthodes de résolutions numériques

- 2. Mise en œuvre des méthodes avec les élèves



- Séances de TP avec :
  - ✓ Logiciel de géométrie dynamique
  - ✓ Tableur
  - ✓ Logiciel d'algorithmique
- Comparaison des vitesses de convergence (Newton vs dichotomie)

Suites convergentes
Méthode de Newton pour la résolution numérique d'équations

paramètres:	$x_{0=}$	10		h=	0,001			
						convergence		
n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$		$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$\lvert x_n - \varphi\rvert$	$\lvert x_n - \varphi'\rvert$
0	10	89	19,001			8,4E+00	1,1E+01
1	5,316036	21,9442027	9,633072		4,7E+00	3,7E+00	5,9E+00
2	3,03802928	5,19159262	5,07705856		2,3E+00	1,4E+00	3,7E+00
3	2,01547014	1,04664975	3,03194028		1,0E+00	4,0E-01	2,6E+00
4	1,67026224	0,1196137	2,34152448		3,5E-01	5,2E-02	2,3E+00

```
dicho():={
f(x):={x^3-5*x^2+3;};
  a:=0;
  b:=1;
  p:=0.000000001;
  while((b-a)>p)
    {c:=(a+b)/2;
      if(f(a)*f(c)<0)
      {b:=c}
      Else
        {a:=c};
        };
return(evalf(a),evalf(b));
};
```